Click to verify

Exercice 1 Déterminer la limite des suites suivantes : $u_n=\dfrac{n^2-1}{n+1}$ pour tout $n$ entier naturel. $\quad$ $u_n=\dfrac{n^3-1}{3n^2+5n^4}$ pour tout $n$ entier naturel non nul. $\quad$ $u_n=\dfrac{1-n^3}{n-5n^4}$ pour tout $n$ entier naturel non nul. $\quad$ $u_n=\dfrac{2n^4-1}{n^2+5n^4}$ $\quad$ $u_n=\dfrac{n^2-1}{n+1}=\dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1}=n-1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=+\infty$ $\quad$ $\quad$ $\begin{align*} u_n&=\dfrac{n^3-1}{3n^2+5n^4} \\ &=\dfrac{n^3\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(\dfrac{3}{n^2}+5\right)} \\ &=\dfrac{1-\dfrac{1}{n^3}}{n\left(\dfrac{3}{n^2}+5\right)} \end{align*}$ $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\dfrac{1}{n^3}=1$ $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{3}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n^2}+5=5$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\dfrac{3}{n^2}+5\right)=+\infty$ Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty}u_n=0$. $\quad$ $\quad$ $\begin{align*} u_n&=\dfrac{1-n^3}{n-5n^4} \\ &=\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n^3}-1\right)}{n^4\left(\dfrac{1}{n^3}-5\right)} \\ &=\dfrac{\dfrac{1}{n^3}-1}{n\left(\dfrac{1}{n^3}-5\right)} \end{align*}$ $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{1}{n^3}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{1}{n^3}-1=-1$ $\lim\limits_{n \to +\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3}-5=-5$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\dfrac{1}{n^3}-5\right)=-\infty$ Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty}u_n=0$. $\quad$ $\quad$ $\begin{align*} u_n&=\dfrac{2n^4-1}{n^2+5n^4} \\ &=\dfrac{n^4\left(2-\dfrac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\dfrac{1}{n^2}+5\right)} \\ &=\dfrac{2-\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{1}{n^2}+5} \end{align*}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^4}=0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2-\dfrac{1}{n^4}=2$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2}=0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2}+5=5$ Par conséquent$ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n=\dfrac{2}{5}$ $\quad$ $\quad$ Exercice 2 Déterminer les limites des suites suivantes : $u_n=\dfrac{n^2-\sin n}{n+1}$ pour tout $n$ entier naturel. $\quad$ $u_n=n^2-(-1)^n$ pour tout $n$ entier naturel. $\quad$ $u_n=\dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n}$ pour tout entier naturel $n$ non nul. $\quad$ Pour tout entier naturel $n$ on a : $\begin{align*} -1\pp \sin n \pp 1 &\ssi -1 \pp -\sin n \pp 1 \\ & \ssi n^2-1\pp n^2-\sin n \pp n^2+1 \\ & \ssi \dfrac{n^2-1}{n+1} \pp u_n \pp \dfrac{n^2+1}{n+1} \\ &\ssi \dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1} \pp u_n \pp \dfrac{n^2+1}{n+1} \\ &\ssi n-1\pp u_n \pp \dfrac{n^2+1}{n+1} \end{align*}$ On a donc $u_n \pg n-1$ Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n-1 = +\infty$ D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} = +\infty$ $\quad$ Pour tout entier naturel $n$ on a : $\begin{align*} -1\pp (-1)^n \pp 1 &\ssi -1 \pp -(-1)^n \pp 1 \\ &\ssi n^2-1 \pp u_n \pp n^2+1 \end{align*}$ On a donc $u_n \pg n^2-1$ Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2-1 = +\infty$ D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} = +\infty$ $\quad$ Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $-1 \pp \sin\left(n^2\right) \pp 1 \ssi -\dfrac{1}{n} \pp u_n \pp \dfrac{1}{n}$ Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}=0$ D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=0$ $\quad$ $\quad$ $\quad$ Exercice 3 Déterminer les limites des suites suivantes : $u_n=\dfrac{0,5^n-0,2^n}{2^n+1}$ pour tout $n$ entier naturel non nul. $\quad$ $u_n=\ds \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{2^k}$ pour tout $n$ entier naturel. $\quad$ $u_n=\ds \sum_{k=0}^n\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ pour tout $n$ entier naturel. $\quad$ $u_0=4$ et, pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$. $\quad$ $-1 \dfrac{3}{\varepsilon}-1\]Ainsi, pour tout \(\varepsilon > 0\), dès que \(n > \dfrac{3}{\varepsilon}-1\), on a \(\left\lvert u_n – 3 \right\rvert < \varepsilon\). Ainsi, la suite \((u_n)\) est convergente et \(\displaystyle \lim _{n\to + \infty}u_n=3\). Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite \((u_n)\) définie pour tout entier naturel non nul \(n\), 1. \(u_n= n^2+\sqrt{n}\) 2. \(u_n = \dfrac{1}{n}-n^3\) 3. \(u_n = e^{-n}+3n\) 4. \(u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}+n\) 5. \( u_n =-6n^2+1+ \dfrac{1}{n}\) 6. \(u_n=\dfrac{1+n}{n}\) Afficher/Masquer la solution On sait que \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} n^2 = +\infty\), \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \sqrt{n} = +\infty\). Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty\) On sait que \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} -n^3 = -\infty\). Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left( \dfrac{1}{n}-n^3 \right) = -\infty\) On sait que \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} e^{-n} = 0\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} (3n)= +\infty\). Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left(e^{-n}+3n\right) = +\infty\) On sait que \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0\), \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} n = +\infty\). Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left( \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+n \right) = +\infty\) On sait que \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty}-n^2 = -\infty\), \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} 1 = 1\). Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left( -6n^2+1+ \dfrac{1}{n} \right) = -\infty\) Pour tout entier naturel non nul \(n\), \(u_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{n}{n}=1+\dfrac{1}{n}\). On sait que \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} 1 = 1\). Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left( \dfrac{1+n}{n} \right) = 1\) Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite \((u_n)\) définie pour tout entier naturel non nul \(n\), 1. \(u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n}+2\right)\) 2. \( u_n = \left(3+\dfrac{2}{n}\right) \left( \dfrac{5}{n^2}-2\right)\) 3. \(u_n=\sqrt{n}-n^2\sqrt{n}\) 4. \(u_n=n^2-n\) 5. \(u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)\) 6. \(u_n = (3n+1)\left(\dfrac{1}{n}-2\right)\) Afficher/Masquer la solution D'une part, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} (2n+1) = +\infty\). D'autre part, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0\) d'où \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left(\dfrac{1}{n}+2\right) = 2\). Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} (2n+1)\left(\dfrac{1}{n}+2\right) = +\infty\). D'une part, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{2}{n}=0\), d'où \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left(3+\dfrac{2}{n}\right)=3\). D'autre part, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \dfrac{5}{n^2}=0\) d'où \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left(\dfrac{5}{n^2}-2\right)=-2\). Finalement, en utilisant les règles de calcul de la limite d'un produit, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \left(3+\dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2}-2\right)=3\times (-2)=-6\). Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type « \)infty – infty \(. Il faut donc factoriser \(u_n\). Pour tout entier \(n\), \(u_n=\sqrt{n}(1-n^2)\). Or, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} \sqrt{n}=+\infty\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} (1-n^2)=-\infty\). Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} u_n = -\infty\). Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type « \)infty – infty \(. Il faut donc factoriser \(u_n\). Pour tout entier naturel \(n\), \(u_n=n(n-1)\). Or, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty}n=+\infty\) et \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty} (n+1)=+\infty\). Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n\to +\infty}u_n=+\infty\). D'une part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} \left( 1-\dfrac{1}{n}\right)=1\). D'autre part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} \left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)=2\). Ainsi, par limite du produit, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} u_n=2\) D'une part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} (3n+1)=+\infty\). D'autre part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=-2\). Ainsi, en utilisant la règle des limites sur les produits, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty}u_n=-\infty\) (ne pas oublier la règle des signes). Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite \((u_n)\) définie pour tout entier naturel non nul \(n\), 1. \( u_n = \dfrac{e^n}{1+\frac{1}{n}}\) 2. \( u_n = \dfrac{6+\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n}-1}\) 3. \( u_n = \dfrac{-1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}\) 4. \(u_n=\dfrac{3+\sqrt{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\) 5. \(u_n=-2n^2-\dfrac{5}{n+1}\) \(u_n=\dfrac{5}{-1-n}\) Afficher/Masquer la solution D'une part, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} e^n = +\infty\). D'autre part, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0\) d'où \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1\). Finalement, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{e^n}{1+\dfrac{1}{n}}=+\infty\) D'une part, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{3}{n^2}=0\) d'où \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \left(6+\dfrac{3}{n^2}\right)=6\). D'autre part, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{5}{n}=0\) d'où \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{n}-1\right)=-1\). Finalement, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\dfrac{6+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{5}{n}-1}=\dfrac{6}{-1}=-6\). D'une part, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{3}{n}=0\), d'où \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1\). Par ailleurs, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2}=0\) par valeurs supérieures. Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=+\infty\). Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous \(n>0\), \(u_n=n^2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\) et utiliser les règles de calcul sur un produit. D'une part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} (3+\sqrt{n})=+\infty\). D'autre part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)=1\). Finalement, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty}u_n=+\infty \). D'une part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty}(-2n^2=-\infty\). D'autre part, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} -\dfrac{5}{n}=0\). Ainsi, \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty} u_n=-\infty\) Puisque \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty}(-1-n)=-\infty\), on a \(\displaystyle\lim _{n\to + \infty}u_n=0\). En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite \((u_n)\) dans chacun des cas suivants. 1.\( u_n = \dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}\) 2. \( u_n = \dfrac{n^2+1}{n+3}\) 3. \(u_n=\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}\) 4. \(u_n = \dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}\) 5. \(u_n=\dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2}\) 6. \( u_n = \dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}\) pour \(n>0\) Afficher/Masquer la solution Pour tout entier naturel non nul \(n\), \[\dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}=\dfrac{n^3\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{2}{n^3}-4\right)}=\dfrac{3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}}{\dfrac{2}{n^3}-4}\] En appliquant les règles de calcul classiques sur les limites, on en déduit que \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3} = -\dfrac{3}{4}\) Pour tout entier naturel non nul \(n\), \[\dfrac{n^2+1}{n+3}=\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=n\times\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}\] Or, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}=1\) et \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} n = +\infty\). Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{n^2+1}{n+3} = +\infty\) Pour tout entier naturel non nul \(n\), \[\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}=\dfrac{n^3\times\left(\dfrac{1}{n^3}-2\right)}{n^3\times\left(\dfrac{1}{n}-3\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{n^3}-2}{\dfrac{1}{n}-3}\] Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}==\dfrac{-2}{-3}=\dfrac{2}{3}\) Pour tout entier naturel non nul \(n\), \[\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}=\dfrac{n^4\left(\dfrac{1}{n^4}-6\right)}{n^6\left(5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}\right)}=\dfrac{1}{n^2} \times\dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}\] Or, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}} = -\dfrac{6}{5}\) et \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2}=0\). Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}=0\) Pour tout entier naturel non nul \(n\), \[\dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2}=\dfrac{n \times \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \times n^2 \times \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\times \left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)}=n \times \dfrac{ \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)}\] Or, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}n=+\infty\), \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)=-3\) et \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1\). Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2}=-\infty\). Pour tout entier naturel non nul \(n\), \[\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}=\dfrac{n^2 \times \left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)}{n^3\times\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{n^6}}{1+\dfrac{3}{n^3}}\]Or, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}=0\), \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)=1\) et \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)=1\). Ainsi, \(\displaystyle \lim _{n \to +\infty}\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}=0\) On considère la suite \((u_n)\) définie par \[ \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\; u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n} \end{array}\right.\] Calculer \(u_1\) et \(u_2\) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel \(n\), \(0